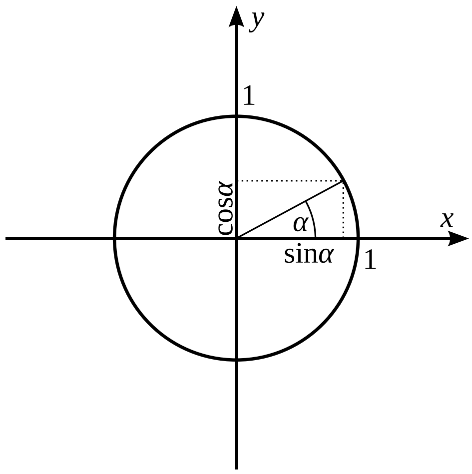
Mehāniskās svārstības
JFS 1. nodarbība

Andris Muižnieks
Linards Kalvāns
LU FMF

Rīga, Latvija, 2011. gada 19. februāris.

1 Svārstības un kustība pa riņķa līniju

Svārstību kustību var aprakstīt ar sinusa un kosinusa funkcijām. Aplūkosim apli, kura rādiuss ir viens metrs (att. 1.). Atzīmējot rādiusu leņķī α attiecībā pret x asi, šī rādiusa projekcija uz y ass ir leņķa α sinuss, bet projekcija uz x ass – leņķa α kosinuss. Iedomāsimies, ka pa šo vienības apli



Attēls 1.: Vienības aplis.

iet cilvēciņš pretēji pulksteņa rādītāja virzienam, tas nozīmē, ka viņa leņķis attiecībā pret x asi visu laiku pieaug, pie tam, ja cilvēciņš iet ar nemainīgu ātrumu, tad leņķi α var izteikt ar leņķiskā ātruma ω un laika t palīdzību:

$$\alpha = \omega t. \tag{1}$$

Savukārt cilvēciņa x un y koordinātas var aprakstīt ar jau minēto $\cos\alpha$ un $\sin\alpha$ funkciju palīdzību. Vispārinot situāciju aplim ar rādiusu A, x un y koordinātas var izteikt:

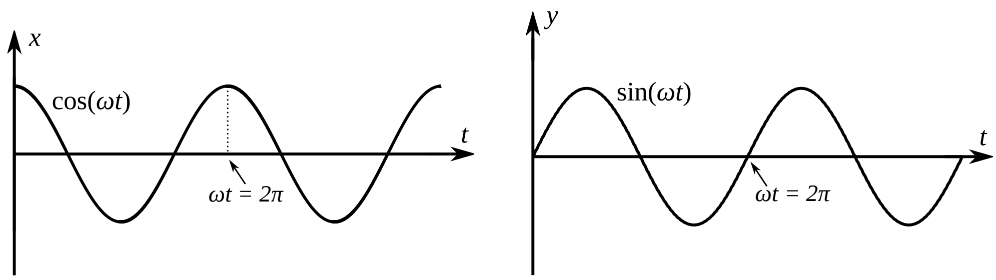
$$x = A\cos(\omega t), \tag{2a}$$

$$y = A\sin(\omega t). \tag{2b}$$

Pie tam, ja ir zināms laiks, kurā tiek veikts viens pilns aplis T, kuru var saukt arī par periodu, tad leņķisko ātrumu var izteikt kā

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

šeit un turpmāk leņķis tiek izteiks radiānos ($360° = 2\pi$ rad).



(a) Kustībā pa riņķa līniju x koordinātas izmaiņas apraksta kosinusa funkcija.

(b) Kustībā pa riņķa līniju y koordinātas izmaiņas apraksta sinusa funkcija.

Attēls 2.: Kustības pa riņķa līniju x un y koordinātu apraksts.

Turpmāk mēģināsim pamatot, ka arī svārstību kustība ir aprakstāma ar sinusa vai kosinusa funkciju.

2 Brīvu svārstību matemātiskais apraksts

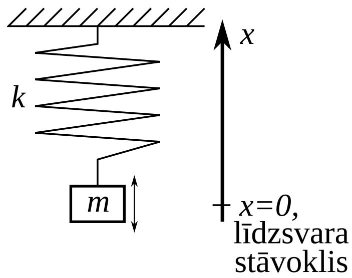
Atsperes svārstā (att. 3.) uz ķermeni ar masu m darbojas atgriezējspēks, kas ir atkarīgs no novirzes no līdzsvara stāvokļa x un atsperes stinguma koeficienta k:

$$F = -kx. \tag{4}$$

Ievietojot šo spēku labi zināmajā 2. Ņūtona likumā ($F = ma$), iegūstam sakarību

$$-kx = ma, \tag{5}$$

kur a ir paātrinājums.



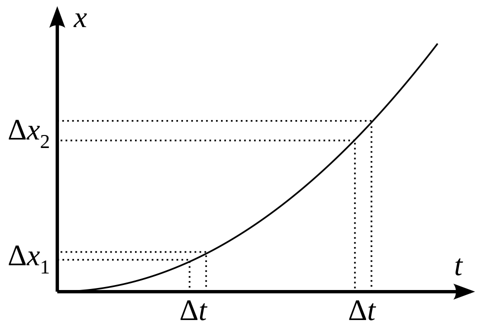
Attēls 3.: Atsperes svārsts.

2.1 Ātrums un paātrinājums kā atvasinājumi pēc laika

Ātrums v ir saistīts ar koordināti x, pie tam, saskaņā ar vidusskolas kursu, ir izsakāms kā kādā laika posmā Δt veiktais attālums Δx (att. 4.), kuru ērtības labad sauksim par koordinātas x izmaiņu,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{6}$$

Ja ātrums jeb koordinātas izmaiņas straujums laika gaitā mainās, tad mēs



Attēls 4.: Ātrums kā koordinātas izmaiņa Δx laika intervālā Δt.

būtu ieinteresēti laika intervālu Δt izteiksmē (6) samazināt, lai pēc iespējas precīzāk noskaidrotu **momentāno ātrumu** kādā laika brīdī. Matemātiski var definēt robežgadījumu, kad aplūkotais laika intervāls tiecas uz nulli, šādā gadījumā izteiksmes (6) labo pusi sauc par koordinātas x **atvasinājumu** pēc laika t un pieraksta kā

$$v = \left.\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Jāņem vērā, ka, ieviešot atvasinājumu, liekot saucējam tiekties uz nulli, to dara arī skaitītājs, līdz ar to rezultāts joprojām ir galīgs skaitlis. Matemātikā atvasinājums ir viennozīmīgi definēta operācija – tāpat kā saskaitīšana vai atņemšana. Izmantojot atvasinājumu, var teikt, ka **ātrums ir koordinātas atvasinājums pēc laika**.

Paātrinājums ir definēts kā ātruma izmaiņa (Δv) kādā laika intervālā (Δt). Saskaņā ar ātruma definīciju, paātrinājums ir koordinātas izmaņas straujuma straujums. Liekot laika intervālam tiekties uz nulli, iegūstam, ka paātrinājums ir ātruma atvasinājums pēc laika. Ņemot vēra, ka ātrums pats ir koordinātas **pirmais** atvasinājums pēc laika, **paātrinājums ir koordinātas otrais atvasinājums pēc laika**:

$$a = \left.\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{8}$$

2.2 Brīvu svārstību vienādojums

Ņemot vērā paātrinājuma definīciju (8), atsperes svārstu aprakstošo vienādojumu (5) var pārrakstīt šādi:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx. \tag{9}$$

Fizikā šo sauc par **brīvu svārstību vienādojumu**, savukārt matemātikā tas pieder pie **diferenciālvienādojumiem**. Diferenciālvienādojumiem ir raksturīgi tas, ka nezināmais ir kāda funkcija (šajā gadījumā tā ir koordinātas x atkarība no laika t – $x(t)$), pie tam diferenciālvienādojums ietver gan pašu funkcija, gan tās atvasinājumu.

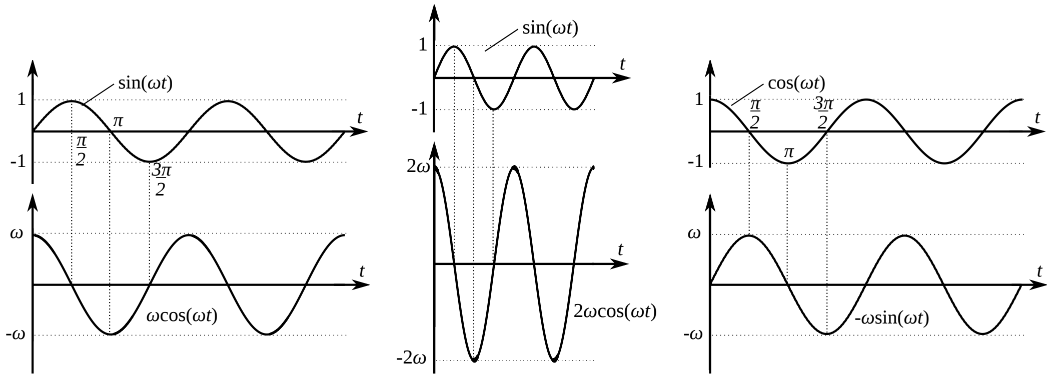
Diferenciālvienādojumu risināšana atšķiras no "parastu" vienādojumu risināšanas. Nereti ir zināms, kādā formā ir jāmeklē vienādojuma atrisinājums, un ir jāatrod tikai koeficientu vērtības. Piemēram, var pierādīt, ka vienādojumam (9) atrisinājumu var meklēt formā, kuru sauc arī par **vispārīgo atrisinājumu**,

$$x = A\sin(\omega t) \text{ vai } x = A\cos(\omega t). \tag{10}$$

Lai pierādītu, ka šāda x izteiksme tiešām apmierina vienādojuma (9) nosacījumus, jāiepazīstas ar sinusa un kosinusa izmaiņas straujumiem jeb atvasinājumiem, kas saskaņā ar izteiksmi (7) ir atbilstošās funkcijas atvasinājums pēc laika. Izmantojot grafikus, var kvalitatīvi noteikt, kādi ir šo trigonometrisko funkciju atvasinājumi.

2.3 Trigonometrisko funkciju atvasinājumi

Aplūkosim attēlu 5.(a); laika momentā $t = 0$ sinuss ir augoša funkcija, pie tam augšana ir visstraujākā, tāpēc tās atvasinājuma jeb "ātruma" vērtība ir maksimāla. Sasniedzot maksimumu ($\omega t = \frac{\pi}{2}$), funkcija ne aug, ne dilst, tāpēc



(a) Sinusa atvasinājums ir kosinuss reizināts ar frekvenci ω.

(b) Frekvences dubultošanas iespaids uz atvasinājumu.

(c) Kosinusa atvasinājums ir mīnus sinuss reizināts ar frekvenci ω.

Attēls 5.: Trigonometrisko funkciju grafiskā atvasināšana.

atvasinājuma vērtība ir nulle. Laika momentā, kad $\omega t = \pi$, sinusa funkcija dilst ar maksimālu ātrumu, tāpēc atvasinājuma vērtība ir minimāla, savukārt pie $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ sinusa vērtība ir sasniegusi minimumu, vairs nemainās, līdz ar to atvasinājuma vērtība ir nulle. Ņemot vērā, ka sinusa funkcijas "ātrums" starp aplūkotajiem punktiem mainās pakāpeniski, tos varētu savienot ar kosinusa funkciju. Pie lielākas frekvences ω vērtības straujāk svārstīsies sinusa vērtība, lai to aprakstītu, atvasinājumu pareizina ar ω vērtību, to ilustrē attēls 5.(b), kurā sinusa frekvence ir dubultota. Analoģiski var pamatot, ka kosinusa atvasinājums ir negatīva sinusa funkcija (att. 5.(c)). Abu trigonometrisko funkciju atvasinājumi ir izsakāmi šādi:

$$\frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} = \omega \cos(\omega t), \tag{11a}$$

$$\frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega \sin(\omega t). \tag{11b}$$

2.4 Brīvu svārstību vienādojuma atrisinājums

Atgriezīsimies pie diferenciālvienādojuma (9) – Lai risinātu šo diferenciālvienādojumu, vispirms jāiegūst vispārīgā atvasinājuma (10) otrais atvasinājums pēc laika:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2[A\sin(\omega t)]}{dt^2} = \frac{d[A\omega\cos(\omega t)]}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t),$$

kuru kopā ar (10) ievietojot diferenciālvienādojumā (9), iegūstam

$$-mA\omega^2\sin(\omega t) = -kA\sin(\omega t).$$

Šai sakarībai jābūt spēkā katrā laika momentā t. Tā kā abās pusēs kā reizinātājs ir laika funkcija $A\sin(\omega t)$, tad ar to var saīsināt katrā laika momentā. Tādējādi iegūstam parastu vienādojumu

$$m\omega^2 = k.$$

No pēdējās izteiksmes izriet

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{12a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12b}$$

Izmantojot (3), varam iegūt no skolas fizikas kursa zināmās formulas: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ un $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Redzams, ka atsperes svārstam frekvence un periods nav atkarīgi no svārstību amplitūdas, bet tikai no k un m.

Svārstību amplitūdas A vērtību nosaka **sākumnosacījumi**. Piemēram, ja sākumā masu m atvelk attālumā A no līdzsvara stāvokļa un palaiž vaļā, tad masa svārstīsies ar amplitūdu A.

3 Uzspiestas svārstības. Rezonanse

Pieņemsim, ka uz masu atsperes svārstā darbojas ne tikai atsperes sastiepuma spēks $-kx$, bet arī kāds ārējs spēks, kas svārstās ar sev raksturīgu frekvenci ω_U: $F\sin(\omega_U t)$. Tādā gadījumā no 2. Ņūtona likuma iegūtais diferenciālvienādojums (9) ir jāpapildina ar šo ārējo spēku:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F\sin\omega_U t. \tag{13}$$

Tad atbilstošais vienādojuma (13) atrisinājums ir meklējams formā

$$x = A\sin(\omega_U t), \tag{14}$$

kur A ir svārstību amplitūda. Ievietojot šo atrisinājumu vienādojumā (13) un kreisajā pusē veicot atvasināšanu, iegūstam

$$-mA\omega_U^2\sin(\omega_U t) = -kA\sin(\omega_U t) + F\sin(\omega_U t)$$

jeb

$$-mA\omega_U^2\sin(\omega_U t) = -kA + F[\sin(\omega_U t)].$$

Šai sakarībai ir jābūt spēkā katrā laika momentā t. Tā kā abās pusēs kā reizinātājs ir laika funkcija $\sin(\omega_U t)$, tad ar to var saīsināt katrā laika momentā, iegūstam parastu vienādojumu

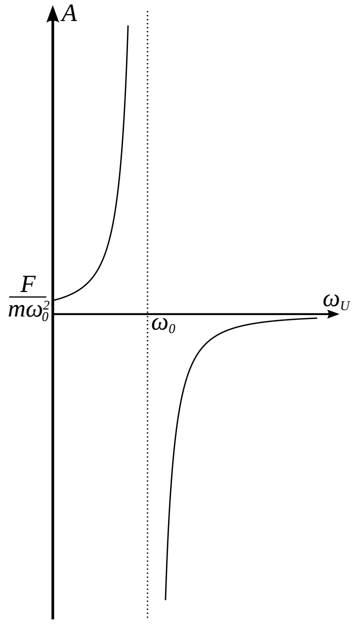
$$kA - mA\omega_U^2 = F.$$

Tālāk abas vienādojuma puses izdala ar m, un, ņemot vērā, ka $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ir brīvo svārstību jeb sistēmas **pašsvārstību** frekvence, varam rakstīt

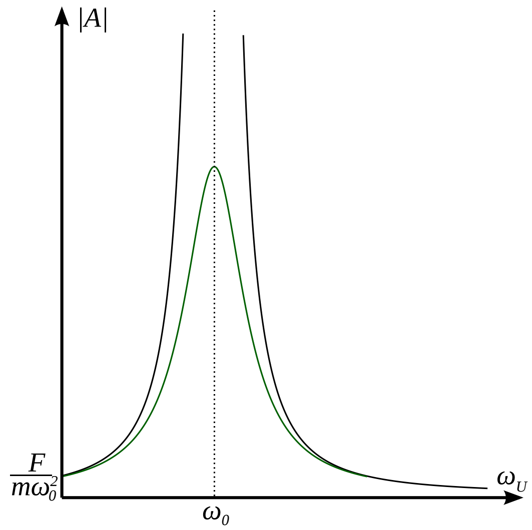
$$\omega_0^2 A - A\omega_U^2 = \frac{F}{m}$$

$$A = \frac{\frac{F}{m}}{\omega^2 - \omega_U^2}. \tag{15}$$

Esam ieguvuši formulu, kas parāda, kāda būs svārstību amplitūda, uzspiedējspēkam pietiekami ilgi iedarbojoties uz svārstu, atkarībā no uzspiedējspēka frekvences ω_U pie dotas uzspiedējspēka amplitūdas F. Attēlojot formulu (15) grafiski, iegūstam attēlā 6. redzamo grafiku. Pie argumenta vērtības $\omega_U = \omega$, izpildās **rezonanses nosacījums**, un svārstību amplitūda (pēc absolūtās vērtības) tiecas uz bezgalību (att. 6.(a)). Reālās svārstībās, pastāvot berzes spēkiem, amplitūdas pieaugums ir ierobežots, tomēr amplitūda tik un tā var sasniegt ļoti lielas vērtības, ja uzspiedējspēka frekvence ω_U sakrīt ar sistēmas pašsvārstību frekvenci ω_0 (att. 6.(b)).



(a) Svārstību amplitūda uzspiestās svārstībās, neievērojot berzi.



(b) Svārstību amplitūdas absolūtā vērtība uzspiestās svārstībās, neievērojot (melnās līknes) un ievērojot (zaļā līkne) berzi.

Attēls 6.: Svārstību amplitūda uzspiestās svārstībās