Šķidrumi un gāzes

Piezīmes no
LU FMF dekāna asoc. prof. Leonīda Buligina
lekcijas

Tēmas paradokss

Ar šķidrumiem un gāzēm ikdienā daudz sastopamies un tos labi pazīstam, tomēr tos aprakstīt un pētīt ir nav vienkārši – vienādojumi, kas apraksta dažādus procesus ir ļoti sarežģīti.

Aprakstīšanai jāizmanto nelineārus parciālus diferenciālvienādojumus, kurus neviens īsti nemāk atrisināt, tādēļ tiek veidoti vienkāršoti modeļi.

Modeļa veidošana

- Jāsaprot, ko domā ar tādiem jēdzieniem kā „ātrums”, „blīvums” u.c.

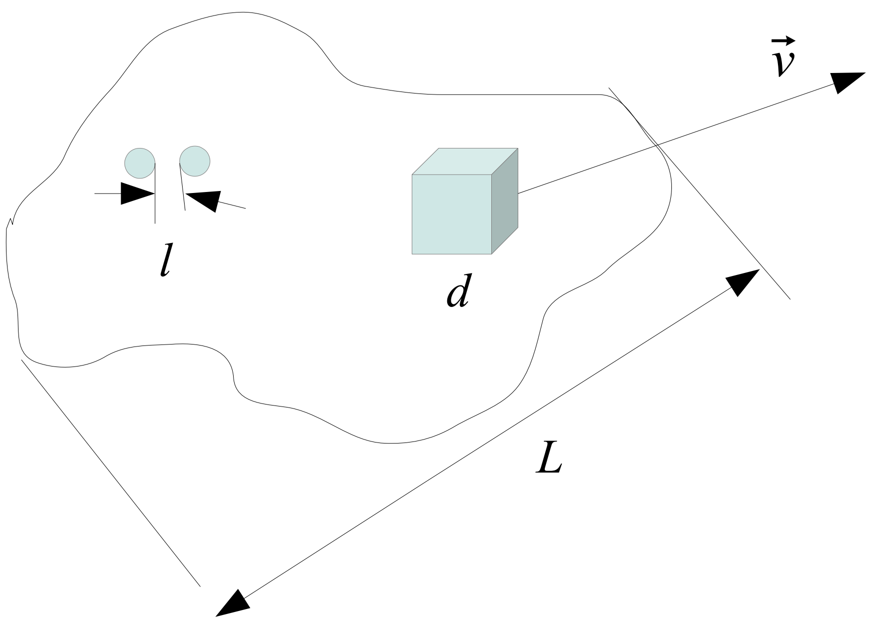
  Ātrums ir vektoriāls lielums (tam ir noteikts virziens un vērtība), kuru var aprakstīt ar trim koordinātēm telpā un laiku.

  $$\vec{v}(x, y, z, t)$$

- Vai lielumi no kā atkarīgs ātrums vai blīvums mainās nepārtraukti, vai ar noteiktu soli?

Nepārtrauktas vides tuvinājums

Vides apgabalā ar izmēru L izvēlas nelielu kubu ar skaldnes garumu d un visus parametrus (ātrums, blīvums, spiediens...) vidējo (aprēķina vidējo vērtību) šajā kubā, aizmirstot par atsevišķām daļiņām.



L – vides apgabala izmērs

l – attālums starp daļiņām

d – kuba skaldnes garums

$l \ll d \ll L$

v – vidējotais kuba ātrums

Plūsmas

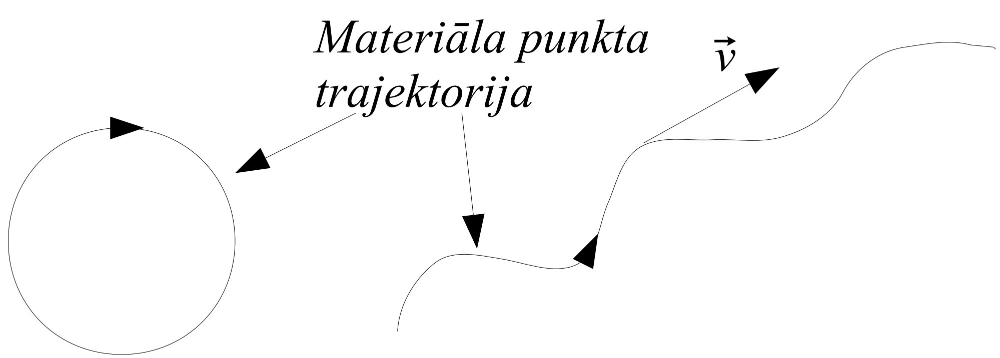
Stacionāras
(nav atkarības no laika)

$$\vec{v}(x, y, z)$$
$$\rho(x, y, z)$$
$$\vec{p}(x, y, z)$$
$$\vec{F}(x, y, z)$$

Nestacionāras
(ir atkarība no laika)

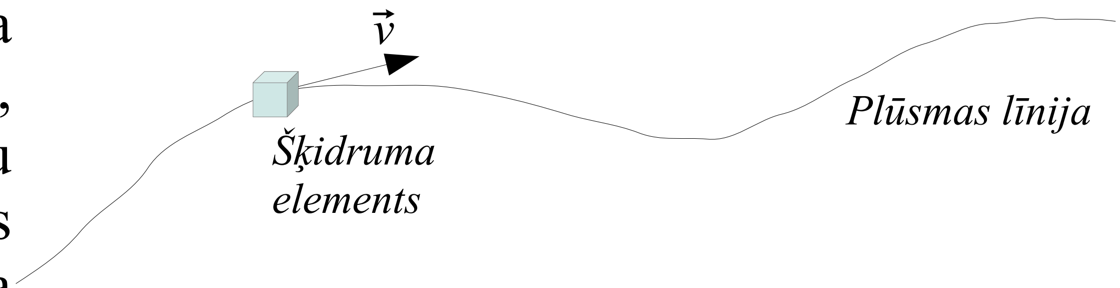
$$\vec{v}(x, y, z, t)$$
$$\rho(x, y, z, t)$$
$$\vec{p}(x, y, z, t)$$
$$\vec{F}(x, y, z, t)$$

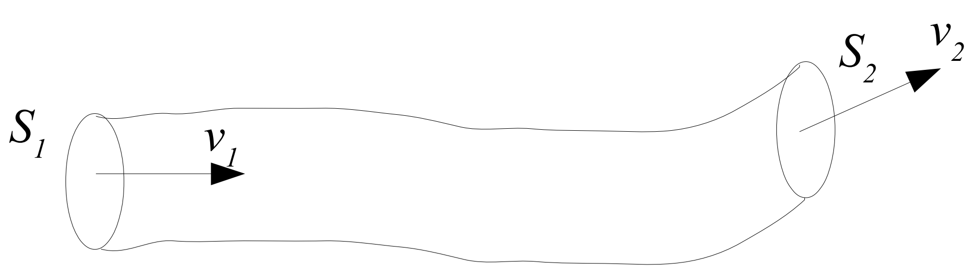
Stacionārām plūsmām izmanto modeļus ar viena ķermeņa kustību (materiāla punkta modelis)



Konkrētā laika momentā ātrums ir pieskares virzienā.

Par pamatu ņemot materiāla punkta modeli, iedomājas, ka līdzīgi pa trajektoriju (plūsmas līniju) pārvietojas punkts jeb šķidruma elements (vidējotais kubs ar izmēru d)





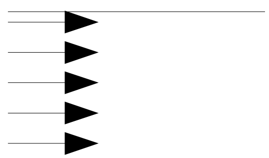
Apvienojot plūsmas līnijas, iegūst virsmu – plūsmas cauruli.
Tai ir tāda konstrukcija, ka viss, kas ietek caurulē, tas arī iztek ārā pa otru galu, pa sāniem nekas neaizplūst.

Plūsmas caurule ir iedomāts objekts, kas, protams, var sakrist ar reālu cauruli, bet tikpat labi tas var būt „gabaliņš” no kādas lielākas plūsmas.

Ideāla šķidruma tuvinājums

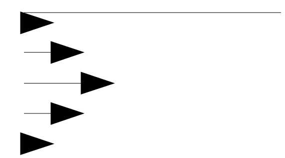
Šķidruma iekšējo slāņu mijiedarbība

Ideāls šķidrums
Nav iekšējas berzes



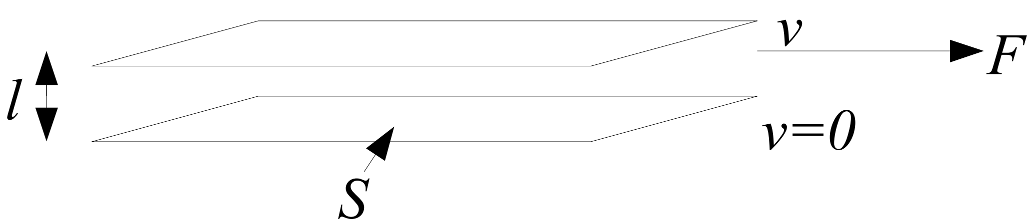
Nav berzes,
jebkāds ātrums

Viskozs šķidrums
Ir iekšējā berze



Ir berze,
pie sienas v=0, uz vidu lielāks

Iekšējā berze nozīmē to, ka divi šķidruma slāņi viens pret otru „berzējas”

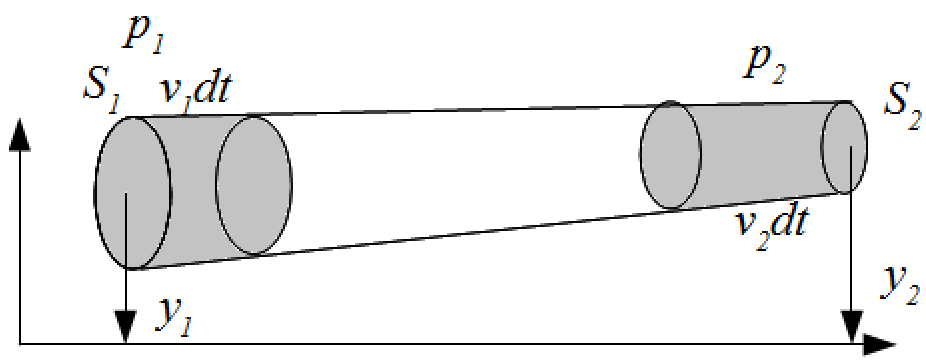


Starp diviem slāņiem ar laukumu *S*, attālumu starp tiem *l* un kustīgā slāņa ātrumu *v* darbojas berzes spēks *F*:

$$F = \mu \cdot S \frac{v}{l}$$

Ar μ apzīmē lielumu, ko sauc par dinamisko viskozitāti, un tas raksturo šķidruma iekšējo berzi – jo tas ir lielāks, jo šķidrums ir viskozāks, t.i., „grūtāk” plūstošs.

Nepārtrauktības (masas saglabāšanās) likums



Masas saglabāšanās likums šajā gadījumā paredz, ka cik liela masa (tilpums) ieplūst „caurulē”, tik liela masa (tilpums) pa otru galu izplūst.

Mazā laika intervālā *dt* masas izmaiņa ir šāda:

$dm_1=\rho dV_1=\rho S_1 v_1 dt$

$dm_2=\rho dV_2=\rho S_2 v_2 dt$

Tā kā $dm_1=dm_2$ ($dV_1=dV_2$) un ρ nemainās, tad

$S_1 v_1=S_2 v_2$

$S*v=const$

ρ – blīvums
v – ātrums
dm – masas izmaiņa
dt – neliels laika intervāls
dV – tilpuma izmaiņa
S – caurules šķērsgriezuma laukums

Bernulli likuma izvedums

$$2a \cdot s = v_2^2 - v_1^2 \quad \Big| \quad \frac{m}{2}$$

$$m \cdot a \cdot s = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)$$

$$F = m \cdot a \qquad E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$F \cdot s = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A = \Delta E_k$$

$$A_n = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$A_n = p_1 V_1 - p_2 V_2 = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho S_2 v_2 dt \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho S_1 v_1 dt \cdot v_1^2$$

$$\Delta E_p = \rho S_2 v_2 dt \cdot g\, y_2 - \rho S_1 v_1 dt \cdot g\, y_1$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g\, y_2 - \rho g\, y_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g\, y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g\, y_2$$

a - paātrinājums
m – masa
v - ātrums
F – spēks
E_k – kinētiskā enerģija
s – ceļš
A – darbs
A_n – nepotenciālu spēku darbs
E_p – potenciālā enerģija
V – tilpums
p – spiediens
ρ – blīvums
S – šķērsgriezuma laukums
dt – mazs laika intervāls
g – brīvās krišanas paātrinājums
y – augstums
Indeksi 1 un 2 apzīmē attiecīgi sākuma un beigu vērtību

Bernulli likums

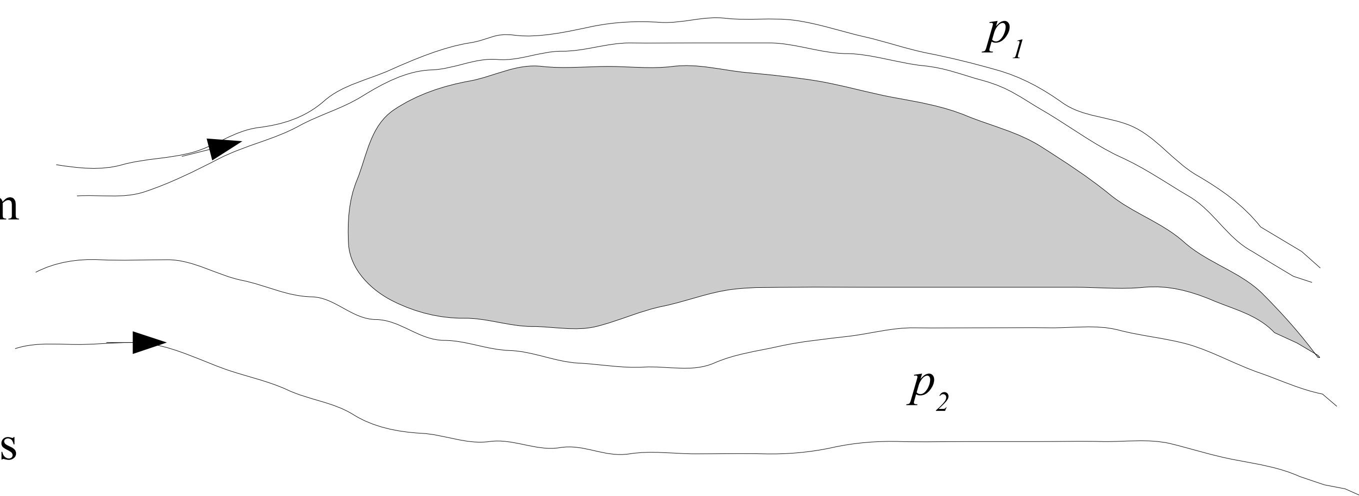
Bernulli likums darbojas ideālām gāzēm un šķidrumiem, stacionārai plūsmai

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

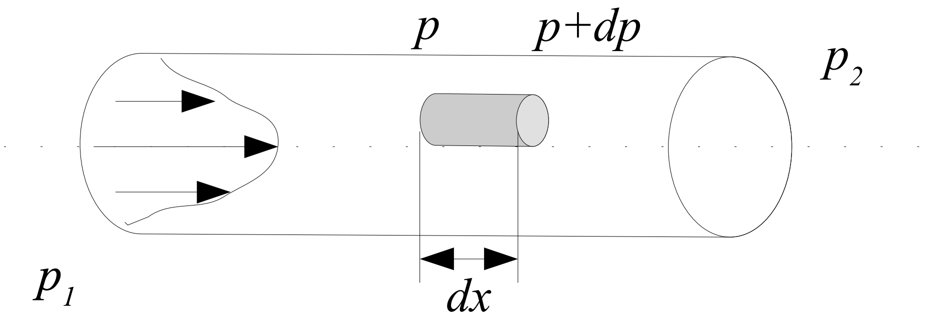
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = const$$

Bernulli likums ļauj izskaidrot daudzas parādības, piemēram, lidmašīnas cēlējspēku. Tāpat tas ir spēkā daudzās dažādās ierīcēs, kā Pito caurulē, Venturi caurulē u.c.

Lidmašīnai vajadzīgs, lai zem spārna gaisa spiediens ir lielāks $p_2 > p_1$ un ātrums mazāks $v_2 < v_1$ (modelī tas nozīmē arī, ka plūsmas līnijas zem spārna ir retākas)



Viskozi šķidrumi



Ir gara caurule, kurā novērojama spiedienu starpība. Uz plūsmu darbojas spiediena spēks un iekšējās berzes (viskozitātes) spēks, tā kā plūsmas ātrums ir konstants, tad rezultējošais spēks ir 0.

Var rakstīt, ka uz mazo cilindriņu darbojošos tangenciālo* un normālo spēku summa arī ir 0.

$$F_n + F_\tau = 0$$

$$F_n = S(p - (p + dp)) = -Sdp = -\pi r^2 dp$$

$$F_\tau = 2\pi r\, dx \cdot \mu \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

$$2\pi r\, dx \cdot \mu \frac{\Delta v}{\Delta r} - \pi r^2 dp = 0$$

$$2\, dx \cdot \mu \frac{\Delta v}{\Delta r} - r\, dp = 0$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu} r \frac{dp}{dx}$$

$$Ja\ dr\ ir\ mazs\ ,\ tad\ v(r) = r^2\ atvasinājums\ \frac{dv}{dr} = 2\mathrm{r}$$

$$tāpēc\ iegūst\ (iegūšanas\ process\ saucas\ integrēšana)$$

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} r^2 \frac{dp}{dx} + C$$

$$No\ nosacījuma\ v(R) = 0\ iegūst$$

$$C = \frac{-1}{4\mu} R^2 \frac{dp}{dx}$$

$$\boxed{v(r) = \frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)}$$

Puazeja likums

Puazeja likums apraksta plūsmas kapilāros un caurulēs pie maziem ātrumiem, piemēram, asins plūsmu asinsvados.
Viskozitāte bieži izpaužas tikai virsmu tuvumā.

**Tangenciāls spēks – vērsts kustības virzienā, tā ietekmē mainās ātrums (palielinās, samazinās)*
Normāls spēks – vērsts perpendikulāri kustības virzienam, tā ietekmē mainās kustības virziens